VALORE ATTUALE DI UNA RENDITA

Il valore attuale di una rendita è la somma dei valori attuali di tutte le rate. Applicando la definizione si ha:

$$V_{t_0} = \sum_{k=1}^{n} R_{t_k} \left(1 + i\right)^{-t_k}$$

Valore attuale di rendita posticipata e temporanea

Supposto n rate costanti e posticipate la formula precedente un periodo prima della scadenza della prima rata diventa:

$$V_0 = R \left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots\ldots (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n} \right]$$

I termini dentro la parentesi quadra, rappresentano la somma di n termini in progressione geometrica di primo termine $a_1 = (1+i)^{-1}$ e di ragione $q = (1+i)^{-1}$. E' noto dalla Matematica Generale, che la somma di n termini in progressione geometrica di primo termine a_1 e ragione q, con q<1, vale :

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

sostituendo si ha:

$$S_n = (1+i)^{-1} \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-1}}$$

Ossia:

$$a_{n\,i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Si legge **a figurato n al tasso i** e rappresenta il **valore attuale di n rate unitarie, periodiche, posticipate al tempo zero al tasso i**, pertanto :

$$V_o = R\, a_{n\, i} = R\, \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

succederà sempre che:

$$a_{n\, i} < n$$

perché rappresenta il valore attuali di n pagamenti unitari posticipati.

Esempi

1) Calcolare il valore attuale di una rendita che prevede 9 rate annue posticipate per un importo di 1.000 € ciascuna, in regime di capitalizzazione composta del 10 % annuo.

$$Vo = R\, a_{9\ 0,1} = 1.000\ \frac{1-(1+0,1)^{-9}}{0,1} = 5.759,02\ €$$

2) Un prestito di un debito di 30.000 euro viene ammortizzato in 7 rate annue costanti e posticipate, al tasso fisso effettivo annuo i = 8 %. Quanto vale la rata?

Si richiede la rata per estinguere un debito di 30.000 euro mediante 7 rate annue costanti e posticipate. Applicando il principio d'equivalenza finanziario, al momento iniziale, uguagliando la prestazione ricevuta (la concessione del prestito di 30.000 euro) con le controprestazione pagamento di 7 rate al tasso i=0.08, indi si ha:

$$30.000 = R\, a_{7\ 0,08}$$

Risolvendo si ottiene:

$$R = 5.762,17 \text{ euro.}$$

3) Uno studenti siciliano per frequentare la Bocconi viene dotato oggi di un fondo di 13.000 € il cui tasso di rendimento è del 12%. Paga a fine di ogni mese l'affitto di 500 €. Dopo quanto tempo dovrà lasciare Milano?

I prelevamenti dello studente per pagare l'affitto sono mensili, mentre il tasso di rendimento del fondo è annuale. Si calcola il tasso mensile equivalente:

$$i_{12} = (1 + i)^{1/12} - 1 = \sqrt[12]{1.12} - 1 = 0.0095 = 0{,}95\ \%$$

Si applica il principio di equivalenza finanziaria al tempo iniziale(oggi):

$$13.000 = 500\ a_{n\ 0.0095}$$

risolvendo rispetto a n:

$$n = -\frac{\ln(1 - \frac{V\,i}{R})}{\ln(1 + i)} = -\frac{\ln(1 - 26\ 0{,}0095)}{\ln(1 + 0.0095)} = 30\ mesi$$

Valore attuale di rendita anticipata e temporanea

Il valore attuale di una rendita temporanea e anticipata all'atto della scadenza della prima rata è uguale alla somma dei valori attuali delle singole rate:

$$V_0 = R\,[1 + (1 + i)^{-1} + (1 + i)^{-2} + \ldots\ldots(1 + i)^{-(n-1)}]$$

I termini dentro la parentesi quadra, rappresentano la somma di n termini in progressione geometrica di primo termine $a_1 = 1$ e di ragione $q = (1 + i)^{-1}$. E' noto dalla Matematica Generale, che la somma di n termini in progressione geometrica di primo termine a_1 e ragione q vale :

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

sostituendo si ha:

$$S_n = 1\ \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{1 - (1 + i)^{-1}}$$

Ossia:

$$\ddot{a}_{n\ i} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}\ (1 + i)$$

Si legge a bi-punto figurato n al tasso i e rappresenta il valore attuale di n rate unitarie, periodiche, anticipate al tasso i. Vale la seguente relazione:

$$\ddot{a}_{n\ i} = a_{n\ i}\ \ 1 + i$$

Pertanto, si ha:

$$V_o = R\,\ddot{a}_{n\,i} = R\ a_{n\,i}\ 1 + i\ = \ R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\,(1+i).$$

Valore attuale di rendita differita temporanea

Si ha la rendita differita quando la prima rata è pagabile o esigibile dopo un periodo chiamato differimento (indicato con m) non coincidente con il periodo. Per calcolare il valore attuale di una rendita differita in 0 si possono fare due considerazioni finanziariamente equivalenti tra loro:

- fingere di trovarsi un anno (o periodo) prima della scadenza del primo termine. La rendita si considera posticipata indi, scontiamo per riportare il valore fittiziamente trovato in zero. In pratica si considera un periodo in meno su tutto il differimento
- fingere di trovarsi alla scadenza del primo termine. La rendita si considera anticipata indi, scontiamo per riportare il valore fittiziamente trovato in zero. In pratica si considera tutto il differimento.

Esempi
1) Calcolare il valore attuale di una rendita costituita da 15 rate annue di importo pari a 1.720 € la cui prima rata scade fra 5 anni sapendo che il tasso unitario annuo applicato è 0,07**.**

Per calcolare il valore attuale di una rendita differita si può fingere di trovarsi al tempo 4 cioè un anno prima della scadenza del primo termine e la si considera posticipata indi, scontiamo per quattro anni riportando ad oggi:

$$V_o = R\,a_{15\ 0.07}\,(1+0.07)^{-4} = 1.720\,\frac{1-(1+0.07)^{-15}}{0.07}\,(1+0.07)^{-4} = 11.951{,}22\ €$$

In alternativa, si considerava un differimento di 5 anni, cioè all'atto del pagamento della prima rata (rendita anticipata) e scontare per cinque anni, cioè:

$$V_o = R\ a_{15\ 0.07}\,(1+0.07)\,(1+0.07)^{-5} = 1.720\,\frac{1-(1+0.07)^{-15}}{0.07}\,(1+0.07)\,(1+0.07)^{-5} = 11.951{,}22\ €$$

In definitiva, in presenza di un differimento è indifferente considerare la rendita anticipata o posticipata, dipende da come viene "pensato" il primo pagamento.

2) Una rendita è costituita da 10 rate semestrali posticipate, alternativamente di 100 euro e di 200 euro. Calcolare il valore attuale della rendita sapendo che il tasso effettivo di interesse annuo è del 5 %.

Si osservi che le 10 rate semestrali non sono uguali e si possono scindere in due di 5 rate costanti con cadenza annuale. Pertanto, le prime cinque rate rappresentano una rendita annuale di rata pari a 100 euro differita 6 mesi (cioè la prima rata scade fra sei mesi), mentre la seconda rappresenta una rendita immediata posticipata di cinque rate pari a 200 euro, in simboli si ha:

$$100\, a_{5\ 0,05}\, (1 + 0,05)^{1/2} + 200\, a_{5\ 0,05} = 1.309,53\ €.$$

Valore attuale di rendita posticipata e perpetua

Il valore attuale di una rendita posticipata ed illimitata o perpetua un periodo prima della scadenza della prima rata è uguale alla somma dei valori attuali delle rate infinite. Si ricorre al limite:

$$V\ 0 = R \lim_{n \to +\infty} a_{\infty\ i} = R \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \left(1 + i\right)^{-\infty}}{i} = R\, \frac{1}{i}$$

Si osservi per il termine al numeratore vale a limite:

$$(1 + i)^{-\infty} = \frac{1}{(1 + i)^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

.

Esempio
Si costituisce una certa somma con una rendita annuale posticipata di 10 rate. Si impiega il capitale costituito per ricevere R illimitatamente. A quale tasso i è possibile l’operazione?

Il tasso i è la soluzione della seguente equazione:

$$R\, s_{10\ i} = R/i$$

da cui si ottiene:

$$1 = [\ (1+i)^{10} - 1]\ (1+i)^{10}$$

da cui si ha la seguente equazione:

$$(1 + i)^{20} - (1 + i)^{10} - 1 = 0$$

posto $t = (1 + i)^{10}$si ha:

$$t^2 - t - 1 = 0$$

l'equazione di secondo grado ha come radice accettabile t=1,61803. si torni alla variabile origine:

$$\sqrt[10]{1{,}61803} - 1 = 0{,}049298$$

Valore attuale di rendita anticipata e perpetua

Il valore attuale di una rendita anticipata ed illimitata alla scadenza della prima rata è uguale alla somma dei valori attuali delle rate infinite. Si può considerare la somma della rata odierna più una rendita perpetua posticipata:

$$V\ 0 = R + R\frac{1}{i} = R\frac{1}{i}(1 + i)$$